Η εξίσωση κύματος

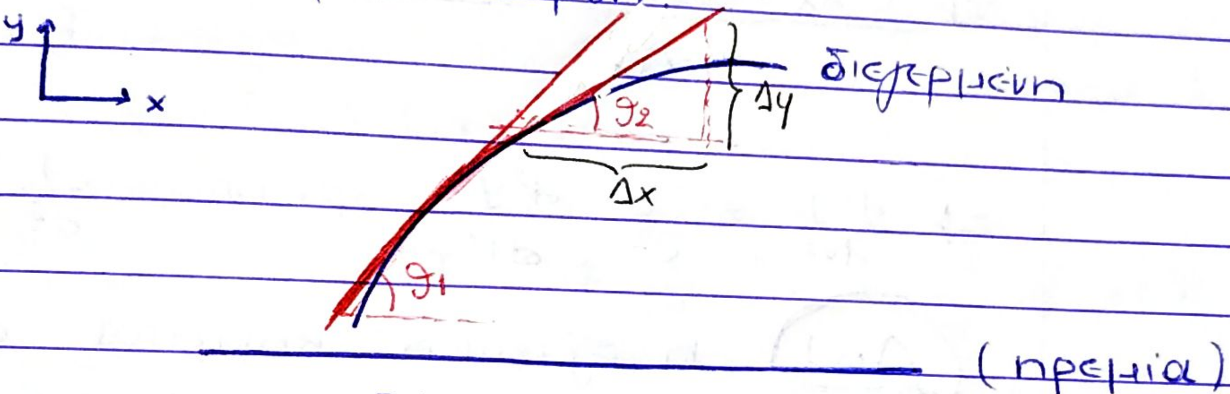
25/11/19

Σε μία διάσταση γνωρίζ. ότι η εξίσωση κύματος είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

x-μετατόπιση, t-χρόνος, h-πλάτος κύματος, c-ταχύτητα φωτός.

Μπορεί να μοντελοποιεί κύματα που διαδίδονται σε μία χορδή.



χορδή σταθερή τάση T

μάζα / μονάδα μήκους μ (σταθερά)

Με ενδιαφέρει ο κατακόρυφος άξονας.

Η δύναμη που ασκείται είναι: $F = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$

Θεωρούμε μικρές γωνίες εκτροπής για τις οποίες $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$

Μια πρώτη σκέψη...

Μικρή γωνία, άρα $\theta \approx 0$

$\Rightarrow \cos\theta \approx 1$

κ. $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$ ...

Δεύτερη (σωστή) σκέψη γιατί $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$: **Taylor !!**

Άρα:

$$F \approx T\cdot(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

αλλά $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Συνεπώς:

$$F \approx T\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\bigg|_{x_2} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\bigg|_{x_1}\right)$$

Όριο: $F = T\cdot\left(\frac{dy}{dx}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{dy}{dx}\bigg|_{x}\right)$

Νόμος Newton: $F = ma = m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$

$$= \mu\cdot\Delta x\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$T\left(\frac{dy}{dx}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{dy}{dx}\bigg|_{x}\right) = \mu\cdot\Delta x\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{dy}{dx}\big|_{x+\Delta x} - \frac{dy}{dx}\big|_{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\mu}{T}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \text{όπου } \frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{T}$$

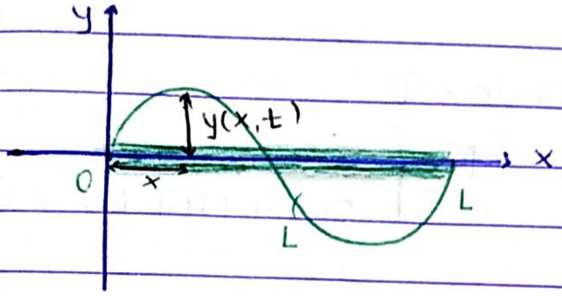
Άρα: η εξίσωση κύματος είναι ουσιαστικά ο νόμος του Νεύτωνα

Η εξίσωση κύματος είναι ίδια για το κάθε όργανο.
Άρα τι αλλάζει κάθε φορά ?

→ Η αρχική συνθήκη !!

Πως μπορούμε να διακρίνουμε τον ήχο κάθε φορά? (π.χ. δεν μπερδεύω ποτέ το τύμπανο με την κιθάρα)
Γιατί $\exists$ τόσα διαφορετικά όργανα?

Θα μελετήσουμε την εξίσωση κύματος στη μία κ' στις πολλές διαστάσεις...



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Δυο παράμετροι κ' στον χώρο, δίνω συνοριακές συνθ.

$$y(0,t) = y(L,t) = 0$$

χρόνου αρχικές συνθήκες: $\begin{cases} y(x,0) = f(x) \\ y_t(x,0) = 0 \end{cases}$

Χρησιμοποιώ τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (seperation of variables)

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

αντικαθιστώ στην εξίσωση

$$XT'' = c^2 X'' T \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''}{T}}_{\text{συν/ση χρόνου}} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{συν/ση χώρου}} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T'' - c^2 \lambda T = 0 \\ X'' - \lambda X = 0 \end{cases}$$

Θεωρώ $\lambda > 0$

$$X'' - \lambda X = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$X(L) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0 \Rightarrow -c_2 e^{\sqrt{\lambda} L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \quad \text{ΑΠΟΡΡ.} \\ e^{\sqrt{\lambda} L} - e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}L} = 1 \Rightarrow \lambda = 0$ <u>ΑΠΟΡΡ.</u>

Άρα αποκλείεται $\lambda > 0$

Θεωρώ λοιπόν $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} T'' + c^2|\lambda| T = 0 \\ X'' + |\lambda| X = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(t) = A_1 \sin(\sqrt{|\lambda|}\, c t) + A_2 \cos(\sqrt{|\lambda|}\, c t) \\ X(x) = c_1 \sin(\sqrt{|\lambda|}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{|\lambda|}\, x) \end{cases}$$

<u>Συνοριακές συνθήκες:</u>

$$\left.\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \cdot \sin(\sqrt{|\lambda|} \cdot L) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ \begin{cases} c_1 = 0 & \underline{\text{ΑΠΟΡΡ.}} \\ \sin(\sqrt{|\lambda|} \cdot L) = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{|\lambda|} \cdot L = n\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{|\lambda|} = \frac{n\pi}{L}}$$

<u>Αρχικές συνθήκες:</u>

$$\left.\begin{matrix} y(x,0) = f(x) \\ y_t(x,0) = 0 \end{matrix}\right\} \quad A_2 = 0$$

$$y(x,t) = B \sin(\sqrt{|\lambda|}\, x) \cos(\sqrt{|\lambda|}\, c t)$$

$$= B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n c \pi t}{L}\right)$$

<u>Όμως:</u> $y(x,0) = f(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Γιατί αυτό να είναι σταθ. ?

Τι λάθος έχω κάνει ?

$\hookrightarrow$ Έχω πρόβλημα στο n

Η λύση μας είναι μία υπέρθεση **ΟΛΩΝ** των δυνατών λύσεων. Άρα:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Γιατί μπορούμε να το γράψουμε αυτό;
↳ Διότι sin (όπως κ' cos) είναι **βάση** (sinx, sin2x, sin3x, ...)

FOURIER !

$$\Rightarrow B = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

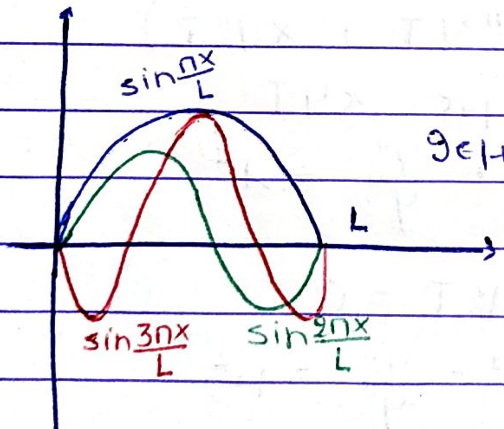
$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ c, & n = m \end{cases}$$

(γιατί αν είναι ίσα, είναι ορθοκανονικά ($c=1$))

Τι βρήκαμε

$$\sqrt{|\lambda|} = \Lambda = \frac{n\pi}{L}$$

αντιστοιχεί στη φυσική συχνότητα της χορδής.
Η κάθε ιδιοτιμή Λ αντιστοιχεί σε μια ιδιοσυν/ση



θεμελιώδης κατάσταση
$\Lambda = \frac{\pi}{2}$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = ?$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\cdot(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\cdot(e^{ix} + e^{-ix})$$

Παρατήρηση:
Η περίπτωση $\lambda = 0$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T'' = 0 \\ X'' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = c_1 t + c_2 \\ X = a_1 x + a_2 \end{cases}$$

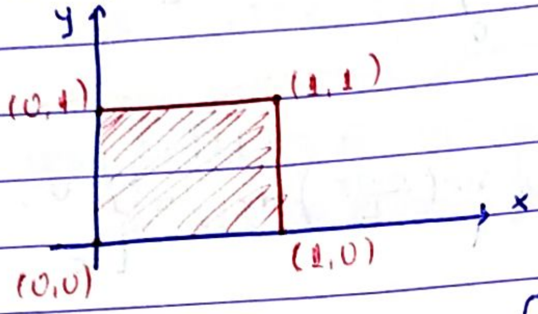
ΑΠΟΡΡ. λόγω αρχ. συνθ.

Η εξίσωση τυμπάνου

Βρίσκομαι στις 3 διαστάσεις:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 z = c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Θεωρώ το μοναδιαίο τετράγωνο τύμπανο



Αρχικές Συνθήκες: $\begin{cases} z(x,y,0) = f(x) \\ z_t(x,y,0) = 0 \end{cases}$

Συνοριακές συνθήκες: $\begin{cases} z(0,y,t) = z(1,y,t) = 0 \\ z(x,0,t) = z(x,1,t) = 0 \end{cases}$

Απαιτούμε φραγμένες λύσεις.

Όπως κ. προηγούμενα εφαρμόζουμε χωρισμό μεταβλητών $z(x,y,t) = X(x)\cdot Y(y)\cdot T(t)$.

Αντικαθιστώ στην εξίσωση

$$XYT'' = c^2(X''YT + XY''T)$$

Διαιρώ με XYT

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T'' - c^2\lambda^2 T = 0 \\ \underbrace{\frac{X''}{X} = \lambda^2 - \frac{Y''}{Y}}_{\text{είναι ίσα όταν είναι σταθ.}} = \mu^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0 \\ Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)Y = 0 \end{cases}$$

Η απαίτηση για φραγμ. λύσεις επιβάλλει αυτά τα πρόσημα κ. το σύστημα τελικά είναι:

$$\begin{cases} T'' + \lambda^2 c^2 T = 0 \\ X'' + \mu^2 X = 0 \\ Y'' + (\lambda^2 - \mu^2) Y = 0 \end{cases}$$

Λύσεις:

$$\begin{cases} X = a_1 \cos(\mu x) + b_1 \sin(\mu x) \\ Y = a_2 \cos(\sqrt{\lambda^2-\mu^2} \cdot y) + b_2 \sin(\sqrt{\lambda^2-\mu^2} \cdot y) \\ T = a_3 \cos(\lambda c t) + b_3 \sin(\lambda c t) \end{cases}$$

Συνοριακές συνθήκες στο 0 : $a_1 = a_2 = b_3 = 0$

στο 1 : $\begin{cases} \mu = m\pi \\ \lambda^2 = (n^2+m^2)\pi^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda = \sqrt{n^2+m^2} \cdot \pi$

Στην περίπτωση της χορδής:

$$\lambda = \frac{n\pi}{L} \quad (L = 1)$$
$$= n\pi$$

Αν $\lambda_0 = \pi$ $(n = 1)$: $\boxed{\lambda_n = n \cdot \lambda_0}$ μελωδία

Στην περίπτωση τυμπάνου:

$n = 1$, $m = 1$, $n = 0$, $m = 1$, $n = 1$, $m = 0$

$\lambda = \sqrt{2}\pi$ $\qquad \lambda = \pi$ $\qquad \lambda = \pi$

Η ιδιότητα της θεμελιώδους έχει χαθεί

θόρυβο

Τη ζημιά την έκανε η ανώτερη διάσταση